Зависит ли отношение $\mathtt{m}/\mathtt{l}$ от того, какая из эквивалентных функций полезности использована в качестве целевой функции?

Что дает сопоставление отношения $\mathtt{m}/\mathtt{l}$ с часовой ставкой заработной платы, имеющей ту же размерность?

# VI. Аддитивные функции

1. В настоящем приложении доказываются утверждения, сформулированные в разделе 2 лекции 18 и относящиеся к аналитическому выражению функции роста вклада. Одним из основных элементов построения функции роста было рассмотрение условия аддитивности. Под *аддитивной функцией* понимают функцию, которая для любых значений аргумента $x$, $y$ удовлетворяет соотношению

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Соотношения, связывающие значения неизвестной функции при различных значениях аргумента, называют функциональными уравнениями. Примером функционального уравнения является равенство (1).

Легко проверить, что при любом значении коэффициента $k$ функция $f(x) = kx$ удовлетворяет уравнению (1). Покажем, что любая непрерывная функция, удовлетворяющая этому уравнению, имеет вид $kx$.

Обозначим $f(1) = k$. Тогда $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = k + k = 2k$; $f(3) = f(2 + 1) = 2k + k = 3k$ и т. д. (индукция!). Таким образом, для любого натурального значения $x$ мы получаем

$$f(x) = kx.$$

Теперь возьмем какое-либо натуральное число $M$ и обозначим $f(1/M) = \mathtt{m}$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем $f(2/M) = 2\mathtt{m}$, $f(3/M) = 3\mathtt{m}$ и т. д.; для любого натурального числа $N$ имеем $f(N/M) = N\mathtt{m}$. В частности, при $N = M$ получаем

$$f(M/M) = M\mathtt{m} = f(1) = k,$$

так что $\mathtt{m} = k/M$, и

$$f(N/M) = k\cdot(N/M).$$

Итак, мы убедились в том, что для любого рационального значения $x$ аддитивная функция имеет вид $f(x) = kx$.

Пусть теперь $x$ — какое угодно вещественное число, $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к $x$. Так как $f(x)$ предполагается непрерывной,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} kx_n = k\lim_{n\to\infty} x_n = kx,$$

чем и исчерпывается доказательство.

2. Полученный результат может быть использован и при решении некоторых других функциональных уравнений, в частности, того, которое возникло в связи с условием согласованности во времени:

$$k(T_1 + T_2) = k(T_1)k(T_2), \tag{2}$$

причем неизвестная функция здесь должна принимать положительные значения.

Почленно логарифмируя функциональное уравнение (2)

$$\ln k(T_1 + T_2) = \ln k(T_1) + \ln k(T_2),$$

мы убеждаемся в том, что функция $L(T) = \ln k(T)$ аддитивна:

$$L(T_1 + T_2) = L(T_1) + L(T_2),$$

и в силу только что доказанного свойства аддитивных функций $L(T) = = \mathrm{b}T$. Итак, мы видим, что $\ln k(T) = \mathrm{b}T$ и, следовательно, решением интересующего нас уравнения является

$$k(T) = e^{\beta T}.$$

Этот результат и был использован при построении функции роста.

## VII. Математика производственных функций

### Эластичность производственной функции и отдача от масштаба

В настоящем пункте мы несколько раз будем ссылаться на Математическое приложение II, которое для краткости будем обозначать МП II.

Как указывалось в лекции 22, предельный продукт некоторого ресурса характеризует *абсолютное* изменение выпуска продукта, приходящегося на единицу изменения расхода данного ресурса, причем изменения предполагаются малыми. Для производственной функции $q = = f(x_1, \ldots, x_n)$ предельный продукт $i$-того ресурса равен частной производной:

$$MP_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$